

# DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL EN REFERENTIEL GALILEEN

On rappelle que la dynamique relie le mouvement observé (décrit par la cinématique) à ses causes. La dynamique fait intervenir une caractéristique matérielle de l'objet (sa masse ou inertie) et les causes admettent une représentation vectorielle sous le nom de forces.

## I. FORCES EXERCEES SUR UN POINT MATERIEL

### 1) Notion de force

Définition : Toute action capable de provoquer ou de modifier le mouvement d'un point matériel est représentée par une grandeur vectorielle qui définit la force exercée sur ce point matériel.

Unité S.I. : le newton (N)

Propriétés :

- Les forces ne dépendent pas du référentiel d'étude.

*Exceptions* : Force de frottement fluide (dépend de la vitesse) et forces d'inertie (voir cours sur les changements de référentiel).

- Les forces sont additives.

Si plusieurs forces  $\vec{f}_i$  s'exercent sur un point matériel, la résultante des forces  $\vec{F}$  qui s'applique sur ce point matériel est égale à la somme de ces différentes forces :  $\vec{F} = \sum \vec{f}_i$

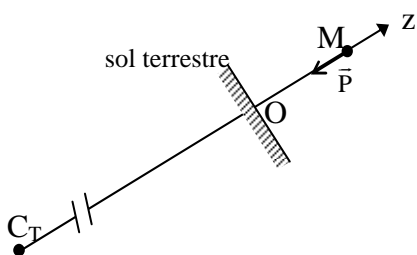
On distingue deux types de forces :

- Les forces (ou interactions) à distance
- Les forces (ou interactions) de contact

### 2) Interactions à distance

#### **a) Interaction gravitationnelle - poids d'une particule**

- Interaction entre deux masses ponctuelles (Force attractive).



Le poids d'une particule M de masse m s'identifie pratiquement, au voisinage de la Terre, à la force gravitationnelle exercée par la Terre (centre  $C_T$ , rayon  $R_T$ , masse  $M_T$ ) sur la particule située à une altitude z du sol terrestre soit :  $\vec{P} = m \cdot \vec{g} \approx -G \cdot M_T \cdot m \frac{\vec{e}_z}{(R_T + z)^2}$   $\vec{e}_z$  suivant la verticale Oz

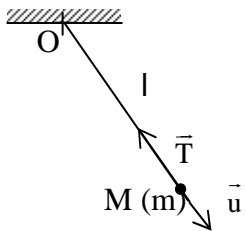
Le champ de pesanteur terrestre  $\vec{g}$  (ou accélération de pesanteur) vérifie à basse altitude ( $z \ll R_T = 6400\text{km}$ ) :  $\|\vec{g}\| \approx G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \approx 9,8\text{m.s}^{-2}$

## b) Interaction électrostatique

- Interaction entre deux charges ponctuelles (Force attractive ou répulsive suivant le signe des charges).

## 3) Interactions de contact

### a) Tension d'un fil



Le point matériel M est lié à une extrémité d'un fil inextensible (longueur du fil constante) de masse négligeable, de longueur  $l$ , dont l'autre extrémité est fixée en O.

Si le fil est tendu, il exerce sur M la force  $\vec{T}$  désignée par tension exercée par le fil :

$$\vec{T} = -T \cdot \vec{u} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{OM} = l \cdot \vec{u} \quad \text{et} \quad T > 0$$

Si le fil n'est pas tendu :  $\vec{T} = \vec{0}$

### b) Force de rappel élastique (exemple d'un ressort)

Soit un ressort de masse négligeable, de longueur au repos (à vide)  $l_0$  et de constante de raideur  $k$  (Unité S.I. :  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ).

Lorsque le ressort est étiré ou comprimé (en charge) sa longueur  $l$  varie ( $l \neq l_0$ ).

Dans le cas usuel, une petite variation algébrique de sa longueur  $\Delta l = l - l_0$ , noté **allongement** (positif si le ressort est étiré et négatif s'il est comprimé), produit une force de rappel élastique qui s'écrit :

$\vec{F} = -k \Delta l \vec{u} = -k(l - l_0) \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire toujours orienté vers l'extérieur du ressort (suivant le sens de l'étirement).

*Remarque* : Le signe - indique que la force a tendance à ramener le ressort vers son état de repos : c'est une force de rappel.

### c) Réaction d'un support solide

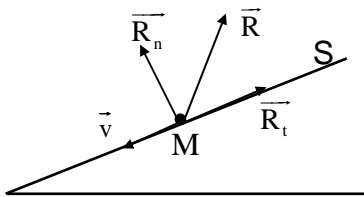
Soit un point matériel M lié à un support solide, courbe ou surface. Les forces d'interaction support-particule admettent une résultante désignée par **réaction du support** sur la particule notée  $\vec{R}$ .

On peut la décomposer en la somme  $\vec{R} = \vec{R}_t + \vec{R}_n$  :

- $\vec{R}_n$  : **composante normale** au support en M dirigée du support vers M.
- $\vec{R}_t$  : **composante tangentielle** au support en M, de même direction et de sens opposé à la vitesse de M sur son support (**force de frottement**).

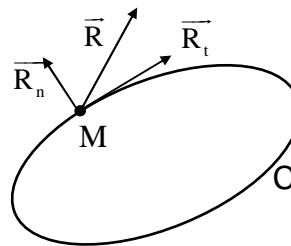
La liaison est dite *unilatérale* si la particule peut quitter son support (surface)

Support = surface S



La liaison est dite *bilatérale* si la particule ne peut quitter son support (anneau coulissant sur une courbe)

Support = courbe C



- La liaison est dite **sans frottement** si  $\vec{R}_t = \vec{0}$  soit  $\vec{R} = \vec{R}_n$
- Lorsque **la particule quitte son support** (pour une liaison unilatérale),  $\vec{R}$  s'annule :  $\vec{R} = \vec{0}$

*Remarque* : Les actions de contact obéissent aux lois de Coulomb (données ici à titre indicatif) :

- \* **Absence de glissement** : M immobile sur le support S :  $\|\vec{R}_t\| \leq f_o \cdot \|\vec{R}_n\|$   $f_o$  coefficient statique de frottement
- \* **Glissement** du point matériel sur S :  $\|\vec{R}_t\| = f \cdot \|\vec{R}_n\|$   $f$  coefficient dynamique de frottement ( $f=0$  en l'absence de frottement)

### d) Force de frottement fluide

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide - liquide ou gaz - initialement au repos dans le référentiel d'étude R, il est « freiné » par les multiples interactions entre les particules du fluide et les éléments de surface de ce solide.

Ces forces sont toujours **opposées à la vitesse du mobile**. Leur modélisation dépend des conditions du déplacement. Par exemple, en désignant par  $\vec{v}$  la vitesse de M dans R (vitesse relative solide-fluide)

- \* pour un solide en translation à faible vitesse on adopte souvent un modèle linéaire :  $\vec{F} = -\lambda \cdot \vec{v}$
- \* pour un solide en translation à grande vitesse, on adopte souvent un modèle quadratique :  $\vec{F} = -k \cdot \|\vec{v}\| \cdot \vec{v}$

*Remarque* : Il existe évidemment d'autres types de forces dont nous verrons certaines au cours de l'année comme par exemple : les forces pressantes exercées par un fluide sur une paroi ou encore la poussée d'Archimède en thermodynamique; la force de Lorentz en électromagnétisme.

## II. POSTULATS DE LA DYNAMIQUE : LES TROIS LOIS DE NEWTON

*Remarque* : Chaque théorie mécanique, - newtonienne, relativiste, quantique, - est basée sur un certain nombre de principes. Ces postulats posés à priori, souvent d'origine expérimentale, sont vérifiés par l'ensemble de leurs conséquences, dans les limites de leur validité. Nous travaillerons dans le cadre de la **mécanique newtonienne** (échelle macroscopique et vitesses faibles devant celle de la lumière  $c - < c/10 -$ )

### 1) 1ère loi de Newton : Principe d'inertie

Énoncé :

Il existe des référentiels privilégiés, appelés **référentiels galiléens**, par rapport auxquels tout **point matériel isolé** (ou pseudo-isolé) est soit au repos, soit en mouvement **rectiligne uniforme**.

- On dit qu'un **point matériel est isolé** lorsqu'il n'est soumis à aucune force (c'est-à-dire éloigné de toute matière). Un tel point ne peut exister au voisinage de la Terre (attraction gravitationnelle). Ainsi nous prendrons un **point matériel pseudo-isolé**, pour lequel les forces appliquées sont négligeables ou se compensent, comme modèle de point isolé.
- La première loi de Newton définit un critère pour distinguer les référentiels dans lesquels les lois de la mécanique newtonienne s'expriment de la même manière. Ces référentiels sont appelés **référentiels galiléens**. Une bonne approximation de référentiel galiléen est donnée par le référentiel de Copernic, d'origine le centre d'inertie du système solaire et d'axes dirigés vers des étoiles "fixes". **Un référentiel animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui aussi galiléen.**

### 2) 2ème loi de Newton : Relation fondamentale de la dynamique

Énoncé :

Dans un **référentiel galiléen**,  $R_g$ , le mouvement d'un point matériel soumis à un ensemble de forces de résultante  $\vec{F}$  est décrit par la loi :  $\vec{F} = \left( \frac{d\vec{p}(M/R)}{dt} \right)_{R_g} = m \cdot \vec{a}(M/R_g)$

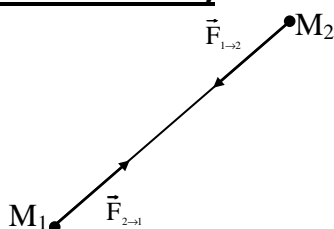
- $\vec{p}(M/R_g)$  désigne la **quantité de mouvement** de M dans  $R_g$  et s'écrit  $\vec{p}(M/R_g) = m \vec{v}(M/R_g)$  où  $\vec{v}(M/R_g)$  est la vitesse de M dans  $R_g$ . La seconde expression  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}(M/R)$  est valable si la masse m du point matériel est conservative, ce qui sera pour nous toujours le cas (**masse constante et indépendante du référentiel** ; unité S.I : kg).

Dimension de  $\vec{F}$  : .....

Unité S.I. le newton : 1 N = .....

**Conséquence** : L'équilibre d'un point matériel dans un référentiel R se traduit par  $\overline{OM} = \overline{cste}$  ou de manière équivalente par  $\vec{a}(M/R) = \vec{0} \quad \forall t$  et  $\vec{v}(M/R) = \vec{0}$  à  $t_0$ . Si le référentiel est **galiléen**, cette condition devient  $\vec{F} = \vec{0} \quad \forall t$  et  $\vec{v}(M/R) = \vec{0}$  à  $t_0$ .

### 3) 3ème loi de Newton : Principe des actions réciproques (ou principe de l'action et de la réaction)



Les forces d'interaction qui s'exercent entre deux points matériels,  $M_1$  et  $M_2$  sont opposées et ont pour support la droite joignant ces points.

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0} \quad ; \quad \overline{M_1 M_2} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$$

### III. ETUDE DYNAMIQUE D'UN MOUVEMENT

#### 1) Méthode d'étude :

- Faire un schéma du dispositif
- Préciser : le système étudié S (ici point matériel) et la nature du référentiel d'étude R (galiléen et le repère R associé)

- Faire un bilan des forces appliquées à S.

Donner l'expression des forces ou leur propriétés (ex : mouvement sans frottement - la réaction du support est perpendiculaire à celui-ci).

- Ecrire le principe fondamental de la dynamique (2<sup>ème</sup> loi de Newton)

Projeter la relation vectorielle obtenue sur une base adaptée. Le choix de cette base est lié à la nature du mouvement et à l'expression des forces appliquées (élimination d'une force inconnue comme la tension du fil ou la réaction du support).

- Intégrer les équations différentielles obtenues (3 dans le cas général) en faisant intervenir les conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration.

#### 2) Application à l'étude du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme sans résistance de l'air puis avec résistance de l'air

On travaille dans un référentiel terrestre de repère associé R ( $\vec{Ox}, \vec{Oy}, \vec{Oz}$ ) de vecteurs unitaires ( $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ); l'axe Oy est vertical ascendant.

L'accélération de la pesanteur est supposée uniforme :  $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_y$  avec  $g = \|\vec{g}\| > 0$ .

Un projectile ponctuel M, de masse m, est lancé du point origine O avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  contenue dans le plan vertical ( $\vec{Ox}, \vec{Oy}$ ) de norme  $v_0$  et faisant l'angle  $\alpha$  avec l'horizontale  $\vec{Ox}$ ,  $0 < \alpha < \pi/2$ .

##### **I. On néglige les frottements exercés par l'air atmosphérique sur le projectile.**

1) Déterminer en fonction des données :

a) les équations  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  du mouvement.

b) l'équation de la trajectoire  $y(x)$ .

c) la portée X définie par  $y = z = 0$  et  $x = X \neq 0$ . En déduire la valeur  $\alpha_0$  qui rend  $X(\alpha)$  maximum pour une vitesse de module  $v_0$  donné, ainsi que la valeur  $X_0$  de ce maximum.

d) le temps nécessaire pour que le projectile atteigne sa plus haute altitude et les coordonnées de ce point S atteint.

2) Application numérique :  $m = 1 \text{ kg}$  ;  $v_0 = 100 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$  puis  $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$

a) Calculer X,  $t_s$  et les coordonnées de S.

b) Représenter l'allure de la trajectoire.

3) Examiner le cas particulier  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

4) La vitesse initiale ayant un module  $v_0$  donné, mais  $\alpha$  étant variable, on désire atteindre une cible C du plan (Oxy) de coordonnées  $(x_C, y_C, 0)$ .

a) Montrer que les valeurs de  $\alpha$  permettant d'atteindre C vérifient l'équation du second degré en  $\tan(\alpha)$  :

$$\tan^2(\alpha) - \frac{2 \cdot v_0^2}{g \cdot x_C} \cdot \tan(\alpha) + \left(1 + \frac{2 \cdot y_C \cdot v_0^2}{g \cdot x_C^2}\right) = 0$$

b) En déduire l'équation de la courbe  $\Sigma$  du plan Oxy séparant les points de ce plan pouvant être atteints par le projectile de ceux qui ne le pourront pas. Cette courbe est désignée par « parabole de sûreté ». Représenter graphiquement cette courbe.

**II. On reprend le problème en tenant compte de l'action exercée par l'air atmosphérique.** Cette action est modélisée par **une force de frottement de type fluide** :  $\vec{F} = -k \cdot \vec{v}$  où  $k$  est une constante positive et  $\vec{v}$  la vitesse instantanée du projectile dans le repère terrestre. On introduira dans les expressions obtenues la grandeur  $\tau = \frac{m}{k}$

1) Quelle est la dimension de  $\tau$  ?

2) a) Donner les composantes de la vitesse du projectile dans R à l'instant  $t$  en fonction de  $t$ ,  $\tau$ ,  $\alpha$ ,  $v_0$  et  $g$ .

b) Montrer que cette vitesse tend vers une limite  $\vec{v}_l = v_l \cdot \vec{e}_y$  que l'on précisera.

3) Déterminer les coordonnées du projectile à l'instant  $t$  en fonction de  $t$ ,  $\tau$ ,  $\alpha$ ,  $v_0$  et  $g$ .

4) Etudier les limites de  $x$ , et  $y$  pour  $t \rightarrow \infty$ . En déduire que la trajectoire admet une asymptote verticale. Ce résultat est-il en accord avec la question II.2-b ?

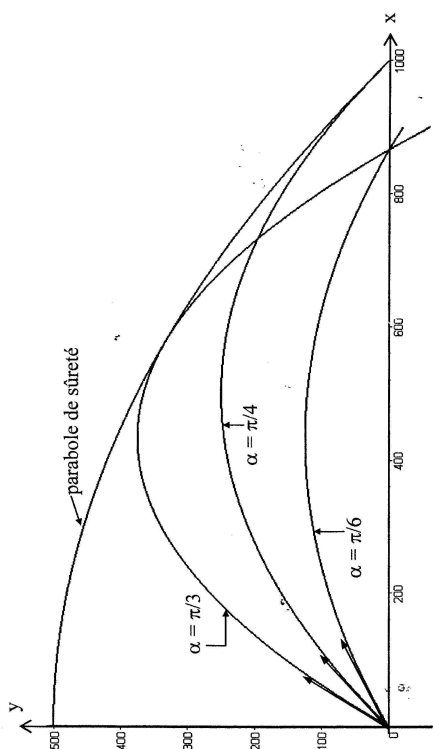
5) Déterminer l'instant  $t_{s'}$  pour lequel le projectile atteint l'altitude maximale et préciser les coordonnées du sommet  $S'$  de la trajectoire.

6) Application numérique :  $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $k = 0,1 \text{ N.s.m}^{-1}$  et mêmes valeurs numériques qu'en I.

a) Calculer  $t_{s'}$  et  $y_{s'}$ . Comparer aux valeurs obtenues en I.

b) Représenter l'allure de la trajectoire.

Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur terrestre



Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur terrestre en tenant compte de la résistance de l'air

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{v}$$

